TEMA 1. Introducción a las señales y los sistemas

PROBLEMA 1. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales periódicas de periodo fundamental T_1 y T_2 respectivamente, tal que

$$x_1(t) = x_1(t + kT_1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2(t) = x_2(t + mT_2), \quad m \in \mathbb{Z}$$

Determinar la relación entre los periodos T_1 y T_2 para que $z(t) = x_1(t) + x_2(t)$ sea una señal periódica y determinar el periodo fundamental de $z(t)$

Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son periódicas debe cumplirse:

$$x_1(t) = x_1(t + T_1) = x_1(t + kT_1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2(t) = x_2(t + T_2) = x_2(t + mT_2), \quad m \in \mathbb{Z}$$

La señal $z(t)$ puede escribirse como:

$$z(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_1(t + kT_1) + x_2(t + mT_2) \qquad (1)$$

Si $z(t)$ fuera periódica se cumpliría:

$$z(t) = z(t+T) = x_1(t+T) + x_2(t+T) \qquad (2)$$

y comparando (1) y (2)

$$T = kT_1 \quad \text{y} \quad T = mT_2$$

luego $\quad T = kT_1 = mT_2 \quad$ ó

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$$

es decir, la suma de dos señales periódicas será periódica si la relación entre sus respectivos periodos es un número racional.

En este caso, el periodo de la señal será el m.c.m.(T_1, T_2), ~~o bien~~ que viene dado por)

$$T = KT_1 = mT_2$$

Si la relación T_1/T_2 es un número irracional, las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ no tienen periodo común y $z(t)$ no puede ser periódica.

PROBLEMA 2. Estudiar la periodicidad de las siguientes señales

a) $x(t) = 5\sin\left(6t + \frac{\pi}{8}\right)$

Las señales sinusoidales son siempre periódicas en t

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) = A\sin(\omega(t+T) + \phi)$$

$$\omega = 6 \;;\; \omega T = 2\pi \;;\; T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

b) $x(t) = \sin(3\pi t)\,u(t)$

Toda función periódica de periodo T debe repetirse a intervalos de tiempo T desde $(-\infty, \infty)$. Al estar multiplicada por $u(t)$, la señal se anula para $t<0$, luego no se cumple la condición de periodicidad:

$$x_2(t) \neq x(t+KT) \quad \forall K \in \mathbb{Z} \text{ y } K \neq 0$$

c) $x(t) = \underbrace{4\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{8}\right)}_{x_1(t)} + \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right)}_{x_2(t)}$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12 \quad || \quad \omega_2 = \frac{\pi}{4};\; T_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

Hemos visto que si

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$$ la señal suma será periódica

luego:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{12}{8} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x(t) \text{ es periódica}$$

El periodo viene dado por:

$$m.c.m(T_1, T_2) = m.c.m(\overset{2^2 \cdot 3}{12}, \overset{2^3}{8}) = 24$$

PROBLEMA 3. Estudiar la periodicidad de las siguientes señales:

a) $x[n] = \cos\left(\frac{4\pi}{5} n + 1\right)$

Para que sea periódica

$$x[n] = x[n+N] = \cos\left(\frac{4\pi}{5}(n+N) + 1\right)$$

$$\Omega_0 = \frac{4\pi}{5} \; ; \quad \Omega_0 N = m 2\pi$$

$$N = m \frac{2\pi}{\Omega_0} = m \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{5}} = m \frac{10\pi}{4\pi} = m \frac{10}{4} = m \frac{5}{2}$$

si $m = 2 \Rightarrow N = 5$, luego $x[n]$ periódica y $N_0 = 5$

b) $x[n] = \underbrace{\sin\left(\frac{n}{3}\right)}_{x_1[n]} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{8} n\right)}_{x_2[n]}$

El producto de dos funciones periódicas es una función periódica cuyo periodo es m.c.m de los respectivos periodos

Si uno de los factores no es periódico tampoco lo será el producto.

$$\Omega_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow N_1 = m \frac{2\pi}{\Omega_1} = m \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = m 6\pi \notin \mathbb{Z}$$

luego $x[n]$ no es periódica.

c) $x[n] = \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{3}n}}_{x_1[n]} + \underbrace{e^{j\frac{3\pi}{4}n}}_{x_2[n]}$

Forma gral: $e^{j(\Omega_0 n + \phi)}$

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow N_1 = m\frac{2\pi}{\Omega_1} = m\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3 \cdot m = 3$$

$$\Omega_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow N_2 = m\frac{2\pi}{\Omega_2} = m\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}} = m\frac{8\pi}{3\pi} = m\frac{8}{3}$$

$$N_2 = 8 \quad (m = 3)$$

La suma será periódica:

$$N = m.c.m(N_1, N_2) = m.c.m(3, 8) = 24$$

d) $x[n] = e^{j\left(\frac{n}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}$

$$x[n] = e^{j\frac{n}{3}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot \underbrace{e^{j\frac{n}{3}}}$$

$$\Omega = \frac{1}{3} \Rightarrow N = m\frac{2\pi}{\Omega} = m\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = m\,6\pi$$

luego $x[n]$ no es periódica

PROBLEMA 4. Determinar la energía total y la potencia media de las siguientes señales:

a) $x(t) = 2$

$$P_i(t) = |x(t)|^2 = 4$$ (señal de potencia)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 4\, dt = \infty$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot 4T = 4$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} 4t\Big|_{-T}^{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{8T}{2T} = 4$$

b) $x[n] = (-1)^{3n}$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |(-1)^{3n}|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 1 =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{2N+1}{2N+1} = 1$$

PROBLEMA 5. Determinar si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas:

a) Si $x[n]$ es una señal impar, entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0$

señal impar: $x[n] = -x[-n]$ y $x[0] = 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] + \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] =$$

$$= x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] + \sum_{n=1}^{\infty} x[-n] =$$

$$= x[0] + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} x[n]} - \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} x[n]} =$$

por ser $x[n]$ impar

$$= x[0] = 0 \qquad (V)$$

b) Si $x_1[n]$ es una señal impar y $x_2[n]$ una señal par, entonces $x_1[n] \cdot x_2[n]$ es impar

Señal impar: $x_1[n] = -x_1[-n]$

Señal par: $x_2[n] = x_2[-n]$

Sea $x_3[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] = (-x_1[-n]) \cdot (x_2[-n]) =$

$$= -\underbrace{x_1[-n] \cdot x_2[-n]} = -x_3[-n]$$

luego $x_3[n]$ es impar $\qquad (V)$

c) Sea $x[n]$ es una señal arbitraria de la que se conocen su parte par e impar.
Demostrar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + x_o^2[n]$

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x_e[n] + x_o[n]\right)^2 =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x_e^2[n] + x_o^2[n] + 2 x_e[n] \cdot x_o[n] \right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n] + 2 \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e[n] \cdot x_o[n]}_{\text{impar}} \to 0 \text{ (apt. (a))}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n] \quad (V.)$$

d) Si $x(t)$ es impar $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 0$

$$x(t) = -x(-t), \quad x(0) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} x(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} x(t)\,dt = \left| \begin{array}{l} t = -t \\ dt = -dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\cancel{\infty}}^{\infty} x(-t)\,dt + \int_{0}^{\infty} x(t)\,dt$$

y aplicando la propiedad de que señal es impar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = -\int_{0}^{\infty} x(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} x(t)\,dt = 0$$

e) Si $x_1(t)$ es impar y $x_2(t)$ es par, entonces $x_1(t) \cdot x_2(t)$ es impar

$$x_3(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

$x_1(t) = -x_1(-t)$ por ser impar

$x_2(t) = x_2(-t)$ por ser par

$$x_3(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) = -x_1(-t) \cdot x_2(-t) = -x_3(-t)$$

luego $x_3(t)$ es impar

f) Si $x(t)$ es una señal arbitraria de la que se conocen su parte par e impar entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int x_e^2(t)\,dt + \int x_o^2(t)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x_e(t) + x_o(t))^2\,dt =$$

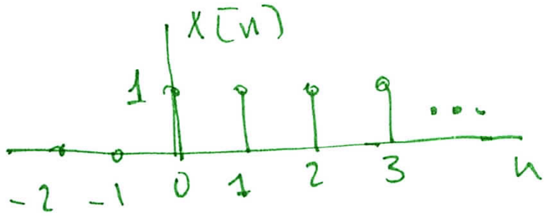
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)\,dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x_e(t)\cdot x_o(t)\,dt}_{\text{es impar} \,=\, 0}$$

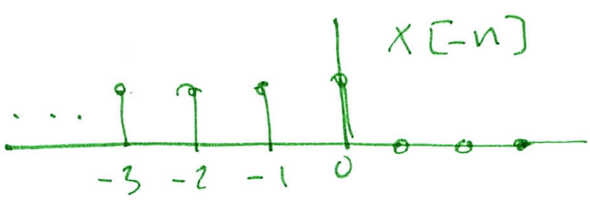
Luego $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)\,dt$

g) Calcular la parte par e impar de la señal:

$$x[n] = \cancel{\begin{cases} t+1, & -1 \le t \le 0 \\ 1 & 0 < t \le 2 \\ 0 & \text{otro } t \end{cases}} = \begin{cases} 1, & n \ge 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$x_p[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} \qquad x_i[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$



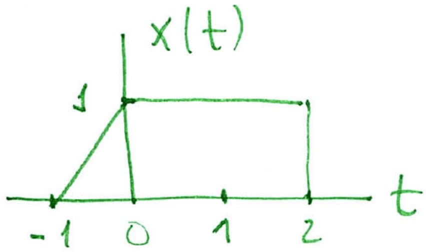


Par: $\begin{cases} \frac{1}{2}, & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ \frac{1}{2} & n > 0 \end{cases}$

Impar: $\begin{cases} -1/2 & n < 0 \\ 0 & n = 0 \\ 1/2 & n > 0 \end{cases}$

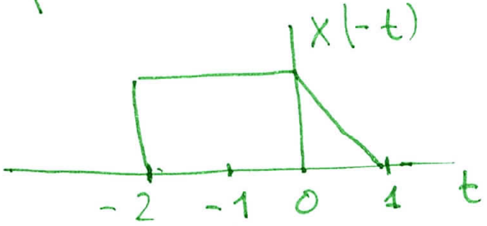
PROBLEMA 6. Dibujar la señal $y(t) = x(6-3t)$ si $x(t)$ es la señal continua representada por la siguiente ecuación:

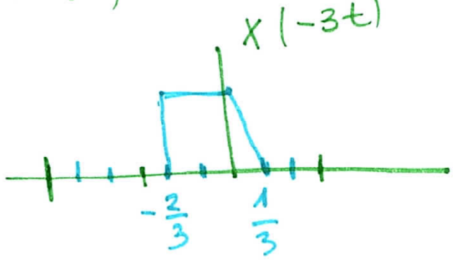
$$x(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq 2 \\ 0 & \text{otro } t. \end{cases}$$

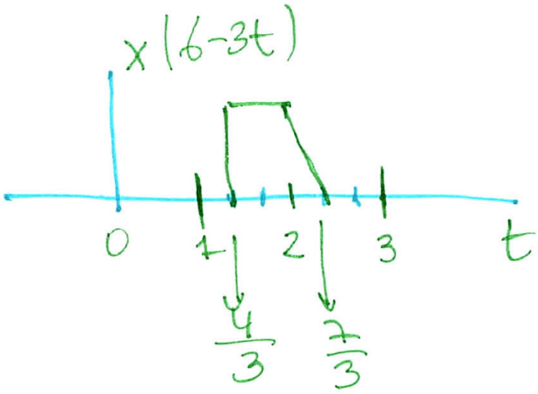


$$y(t) = x(6-3t) = x(-3(t-2))$$

es decir, reflejamos $x(t)$, escalamos por factor 3 y desplazamos 2 unidades (retraso)







o bien:

$$x(6-3t) = \begin{cases} 6-3t+1, & -1 \leq 6-3t \leq 0 \\ 1, & 0 < 6-3t \leq 2 \\ 0 & \text{otro } t \end{cases} = \begin{cases} 7-3t, & -1-6 \leq -3t \leq -6 \\ 1, & -6 < -3t \leq 2-6 \\ 0 & \text{otro } t \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 7-3t, & -\frac{7}{3} \leq -t \leq -\frac{6}{3} \\ 1, & -\frac{6}{3} < -t \leq -\frac{4}{3} \\ 0 & \text{otro } t \end{cases} = \begin{cases} 7-3t, & 2 \leq t \leq \frac{7}{3} \\ 1, & \frac{4}{3} \leq t < 2 \\ 0, & \text{otro } t \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \frac{4}{3} \leq t < 2 \\ 7-3t, & 2 \leq t \leq \frac{7}{3} \\ 0, & \text{otro } t \end{cases}$$

PROBLEMA 7. Indicar cuál de las siguientes ~~...~~ expresiones es correcta:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t-t_0)$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \delta(t-t_0)$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$

PROBLEMA 8: Estudiar la memoria, causalidad, invertibilidad, estabilidad, invarianza temporal y linealidad de los siguientes sistemas:

a) $y(t) = e^{x(t)}$

- Instantáneo ó sin memoria: Sí

Se trata de un sistema instantáneo porque $y(t)$ solo depende del valor de $x(t)$ en cada instante.

- Causal: Sí

Todo sistema sin memoria es causal.

- Invertible: Sí

$y(t) = e^{x(t)}$; $z(t) = \ln(y(t)) = \ln(e^{x(t)}) = x(t)$

luego para cualquier instante de tiempo $z(t)$ es idéntica a $x(t)$.

- Estable:

Si $|x(t)| < B \; \forall t$, entonces $|y(t)| = |e^{x(t)}| = e^{|x(t)|} <$

$< e^B \quad \forall t$

- Lineal: NO

Considerar dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = e^{x_1(t)}$$
$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = e^{x_2(t)}$$

consideremos una nueva señal $x_3(t)$:

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{¿L?} y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Sabemos que:

$$y(t) = e^{x_3(t)} = e^{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)} = e^{\alpha x_1(t)} \cdot e^{\beta x_2(t)} \neq$$
$$\neq \alpha e^{x_1(t)} + \beta e^{x_2(t)}$$

Luego el sistema no es lineal.

- Invariante en el tiempo: Si

Para la señal $x_1(t)$. la salida del sistema es $e^{x_1(t)}$

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = e^{x_1(t)}$$

Desplazamos la señal de entrada t_0 sg y comprobamos si es invariante:

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \xrightarrow{¿TI?} y_1(t-t_0) = e^{x_1(t-t_0)}$$

Sabemos calcular la respuesta a $x_2(t)$:

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = e^{x_2(t)} = e^{x_1(t-t_0)} = y_1(t-t_0)$$

Luego el sistema es invariante con el tiempo.

b) $y[n] = x[n] \cdot x[n-1]$

- Instantáneo (sin memoria): NO

Se observa que la salida en el instante "n_0" depende de la señal de entrada en ese mismo instante (presente) y del instante anterior "$n_0 - 1$" (pasado)

- Causal: Sí

La salida es función de la señal de entrada en el instante evaluado y en un instante anterior ($n_0 - 1$), no anticipa valores.

- Invertible: NO

Contra ejemplos:

1) $x_1[n] = 0 \quad \forall n$ par, $y_1[n] = x_1[n] \cdot x_1[n-1] = 0$

2) $x_2[n] = 0 \quad \forall n$ impar, $y_2[n] = x_2[n] \cdot x_2[n-1] = 0$

3) $x_1[n] = -x_2[n] \Rightarrow y_1[n] = y_2[n]$

- Estable: Sí

Si $|x[n]| < B \quad \forall n$, $|y[n]| = |x[n] \cdot x[n-1]| =$

$$= |x[n]| \cdot |x[n-1]| < B \cdot B =$$

$$= B^2 < \infty \quad \forall n.$$

- Lineal: NO

$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = x_1[n] \cdot x_1[n-1]$

$x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = x_2[n] \cdot x_2[n-1]$

$x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \xrightarrow{L?} \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

Calculamos $y_3[n]$:

$$y_3[n] = x_3[n] \cdot x_3[n-1] =$$

$$= (\alpha\, x_1[n] + \beta\, x_2[n]) \cdot (\alpha\, x_1[n-1] + \beta\, x_2[n-1]) =$$

$$= \alpha^2\, x_1[n] \cdot x_1[n-1] + \alpha\beta\, x_1[n] \cdot x_2[n-1] +$$

$$+ \alpha\beta\, x_2[n] \cdot x_1[n-1] + \beta^2 x_2[n] \cdot x_2[n-1]$$

luego $y_3[n] \neq \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

- Invariante en el tiempo: sí

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = x_1[n] \cdot x_1[n-1]$$

queremos comprobar si:

$$x_2[n] = x_1[n-n_0] \longrightarrow y_2[n] = y_1[n-n_0] =$$

$$= x_1[n-n_0] \cdot x_1[n-n_0-1]$$

Sea $x_2[n] = x_1[n-n_0]$ entonces:

$$y_2[n] = x_2[n] \cdot x_2[n-1] = x_1[n-n_0] \cdot x_1[n-n_0-1] =$$

$$= y_1[n-n_0]$$